FINNES DET EN SANN MATEMATIKK?

Matematikkens grunnideer i et nytt perspektiv

John Einbu

INNHOLD

FORORD

Mengdelæren, den matematiske teori om objektsamlinger, om operasjoner på slike samlinger og om egenskaper ved og relasjoner mellom slike samlinger, står i en særstilling i matematikken på to måter. For det første er det mange matematikere som mener at mengdelæren danner grunnfjellet i matematikken, den hviler ikke på noe annen matematikk, den er helt forutsetningsløs, samtidig som all annen matematikk kan føres tilbake til mengdelæren og kan sies å være naturlige utvidelser av mengdelæren. For det andre har mengdelæren til alle tider i dens 100-årige eksistens vært matematikkens smertensbarn. Helt fra starten skapte den strid; til å begynne med hadde den nesten ingen tilhengere, noen mente den hadde sykelige trekk, konkurrerende teorier oppstod og den ble etter hvert beheftet med en rekke selvmotsigelser som ble kalt paradokser. I dag er det liten tiltro til mengdelæren i mange matematiske kretser, det er få referanser til mengdelærespesifikke resultater i matematiske skrifter (altså til tross for at mengdelæren av mange logikere er ment å skulle danne grunnlaget for all matematikk), det skrives få bøker i mengdelære for tiden og undervisningen i mengdelære på universitetene ligger på et labert nivå.

Opphavsmannen til mengdelæren, George Cantor, hadde sine mest produktive år på slutten at 1800-tallet. Når man leser grunntekstene til læren slår det en at de representerer en litt middelaldersk tankegang. Cantor selv mente han hadde et kall fra Gud om å åpenbare grunnlaget for matematikken for menneskeheten og ingen ting kunne rokke hans overbevisning om at hans teori var riktig. Da flere og flere paradokser ble avdekket etter hvert avfeide han disse med at paradoksene nok har sin forklaring, men at denne forklaring bare var kjent av Gud. Og siden menneskene ikke hadde forutsetning for å forstå alt som befant seg i Guds forestillingsverden kunne de ikke vente å forstå paradoksene.

Noen vil kanskje tro at det ligger i sakens natur at den mest fundamentale teori i en såpass abstrakt vitenskap som matematikken vil være kontroversiell. Siden mengdelæren a priori ikke er basert på noe annen matematikk, må den bygge på valg som det ikke er så lett å bevise er matematisk holdbare, og som man derfor kan ha forskjellige meninger om. Og dette er riktig, mengdelæren ligger i grenselandet mellom filosofi og matematikk og noen av dens grunnsetninger er valgte. Og, som det vil bli klargjort etter hvert, det var ikke nødvendig å gjøre akkurat de valgene man gjorde. Valgene er ikke overbevisende begrunnet, det ligger ingen dype filosofiske eller vitenskapsteoretiske overveielser bak disse, de er heller basert på intuitive betraktninger og ønsketenkning. Og dette er mengdelærens tragedie: noen av dens dypeste premisser virker intuitivt helt selvinnlysende, mens noen av konsekvensene av disse premissene er kontraintuitive og lite plausible. Dilemmaet for matematikerne blir da om de skal velge å stole på premissene og dermed akseptere de noe tvilsomme og høyst merkverdige konklusjonene, eller om de skal oppfatte konklusjonene som selvmotsigende og dermed forkaste premissene. Hittil har de toneangivende mengdeteoretikere valgt den første løsning.

Før vi går videre må vi klargjøre – opp til et visst presisjonsnivå – hva vi i denne boken vil referere til når vi snakker om mengdelære. For ordet "mengdelære" er ikke entydig, det vil ha forskjellig betydning avhengig av hvilken litteratur man leser. Det er nemlig slik at matematikere etter Cantor har forsøkt på forskjellig vis å løse problemene i hans teori. Den løsning som har flest tilhengere i dag, er å bygge mengdelæren opp på et sett aksiomer, altså grunnsetninger som ikke skal betviles, og hvor man har valgt aksiomene slik at flest mulig av paradoksene ikke manifesterer seg. Det har dermed oppstått flere aksiomatiske mengdelærer hvorav den mest populære er den som tilskrives Zermelo og Fraenkel og som betegnes med ZFC. Og i tidsskrifter og bøker beregnet på logikere og mengdeteoretikere er det gjerne denne mengdelære som implisitt legges til grunn. Matematiske filosofer, men også mange rene matematikere, mener at dette er å jukse, man løser et matematisk problem ved å innføre en kunstig begrensning og dette harmonerer ikke med de ideelle kravene til en matematiske teori. Når mengdelære diskuteres i bøker i matematiske filosofi, bøker om matematikk generelt eller i populærvitenskapelige bøker, så er det nesten alltid Cantors opprinnelige mengdelære det refereres til. Ja, til og med lærebøker i mengdelære vil ikke entydig fremheve de aksiomatiske tilnærmingene som de eneste rette. Her diskuteres gjerne paradoksene som reelle og fremdeles uløste problemer. Siden forfatteren av denne boken mener at Cantors tilnærming er den mest vitenskapelige og at det er i Cantors eksplisitte eller implisitte forutsetninger at årsaken til mengdelærens problemer vil være å finne, så vil det ved omtale av mengdelæren være Cantors mengdelære det siktes til i denne boken når ikke noe annet er sagt. Noen forfattere referer til denne lære med betegnelsen "den intuitive mengdelære".

De som mener at paradokser ikke kan være en del av mengdelærens natur og som videre mener at læren må gjennom en radikal revisjon for å bli kvitt disse, står overfor to oppgaver. Først må de på en overbevisende måte vise hvor Cantors mengdelære tar feil og deretter må de legge fram et alternativ til denne lære som ut ifra en helhetsvurdering synes å ha flere tiltalende egenskaper enn dagens lære. I et essay, *Det ufullkomne i matematikken. En utfordring til den etablerte matematikk,* skrevet av undertegnede og utgitt i 1997 på Solum forlag, Oslo, ble det gjort et seriøst forsøk på å få eksponert så mange tvilsomme sider ved mengdelæren at en nøytral leser etter en objektiv vurdering bør være åpen for en revurdering av læren. I den samme boken ble det også skissert hvordan en ny mengdelære kan utformes uten de defekter dagens lære er beheftet med. Blant annet ble det påvist at man kan få en selvmotsigelsesfri mengdelære ved å fjerne ett av lærens grunnprinsipper, nemlig det prinsipp, i denne boken kalt altomfattendehetsprinsippet, som sier at det er mulig å samle alle elementer av en bestemt kategori, som det er uendelig mange av, i en mengde. At det forholder seg slik innrømmes nå også av enkelte matematikere som har gitt kommentarer til boken.

Allikevel ble det ikke i det nevnte essayet (som i den herværende boken vil bli referert til ved uttrykket "[Ein98]") påstått at den skissen til en ny mengdelære som ble lagt fram løste den andre oppgaven nevnt ovenfor. Det viser seg da også at skissen var for mye mengdelærefiksert, den la til grunn at mengdebegrepet skulle ligge i bunnen av all matematikk. I den herværende bok er denne ide forlatt. Det viser seg nemlig at skal man få en selvmotsigelsesfri mengdelære, så kan man ikke se bort fra hvordan mengder er dannet. Altså finnes det mekanismer bak mengdene som det må tas hensyn til, for disse mekanismene bestemmer egenskapene ved mengdene. Men dermed kan ikke mengdelæren være grunnfjellet i matematikken. I boken stilles det også spørsmål om det nødvendigvis må være slik at all matematikk må ha sitt utspring i ett enkelt system av begreper, enheter, operasjoner og relasjoner. Og svaret på dette spørsmålet blir at det ikke er noen logisk grunn til å det må være slik. Den matematikken som foreslås i denne boken legger derfor mye mer vekt på matematikkens tallsystem enn på mengder.

For ordens skyld gjør vi oppmerksom på at den delen av boken som omhandler tallsystemet (kapittel 5 og 6) egentlig bare presenterer en samling enkeltideer om systemets ulike talltyper. Disse talltypene blir betraktet i et nytt perspektiv og sluttresultatet kan man si blir et revidert og utvidet tallbegrep. Siden disse ideene er forenlige med hverandre kan man tenke seg å la de inngå i grunnlaget for matematikken. Dette grunnlaget vil da bli noe annerledes en dagens. Vi kommer ikke til å gi noen helhetlig beskrivelse verken av dette grunnlaget eller av en eventuell matematikk som kan avledes av det. Denne oppgave ville ha sprengt rammen for denne boken. Men det er likevel hensiktsmessig i den videre diskusjon å referere til en slik matematikk, og vi vil da bruke uttrykket *Den reviderte matematikken* eller forkortet DRM. I DRM vil vi også inkludere alle de observasjoner og konklusjoner vi etter hvert gjør omkring mengdebegrepet.

Og dagens tallsystem, som ikke har undergått noen forandringer på over 100 år, synes å være moden for modernisering. Dagens uendelighetsbegrep er for eksempel svært ullent og vanskelig og forholde seg til. Her må det opprydding til. Problemet med representasjon av reelle tall må også få en bedre løsning enn i dag. Dagens løsning gir rom for mange villfarelser. Det er også nødvendig med en ny forståelse av rasjonale tall.

At så få av dagens generasjon av matematikere reiser spørsmål ved de mange skjønnhetsfeil ved matematikken som er åpenbare for alle som reflekterer over saken, har flere grunner. Matematikerne er et konservativt folkeferd, de har sine guruer som nyter en enorm respekt og som man derfor nødig vil komme i opposisjon til. Dessuten gjelder det kjente uttrykket *det nestbeste er det bestes fiende:* fordi matematikken fungerer ganske bra slik den er, synes ikke behovet å være tilstede for større revisjoner. Men den viktigste grunnen for at matematikken fungerer er at man gjennom tidene har utvist stor oppfinnsomhet i å kompensere for dens defekter og anomalier ved forskjellige slags forsvarsmekanismer. Dette ble godt dokumentert i [Ein98].

Selv om det i boken utledes mange resultater i motstrid med Cantors mengdelære, så er det ikke noe overordnet mål å påvise at læren er inkonsistent eller at dens teoremer *ikke følger av dens forutsetninger*. Det påstås derimot at det er mengdelærens *forutsetninger* det er noe feil ved. Så det at vi avleder andre resultater og gjør observasjoner som avviker fra Cantors mengdelære skyldes altså at vi legger andre forutsetninger til grunn enn hva Cantor gjorde. Om mengdelæren er konsistent eller ikke har da egentlig liten interesse.

Boken legger stor vekt på å begrunne valgene av forutsetninger som den reviderte matematikken hviler på. I denne henseende er boken, betraktet som matematikkbok, nokså atypisk. Kanskje så mye som halvparten av boken er av meta-matematisk eller filosofisk karakter. Den er derfor ikke bare en matematikkbok, den er også en bok *om* matematikk. Derfor vil leseren bli invitert til å ta del i diskusjoner om målet for matematikken, om matematikken er sann, om selvmotsigelser bør aksepteres i matematikken, ja til og med om de er ønskelige (som noen hevder), om i hvor stor grad matematikken oppfyller menneskets ønske om perfeksjon, om hvor stor frihet man har til å bestemme egenskaper ved matematikken ved hjelp av aksiomer og definisjoner, og om mye annet.

Lesere med intim kjennskap til mengdelære vil finne at enkelte begreper som innføres i denne boken og tenkemåten bak disse begrepene virker ny og fremmedartet, og de vil kanskje hevde at dette er et tegn på at jeg ikke har den rette forståelse for klassisk mengdelære. Disse bør reflektere over følgende. Hvis resultater som avledes av en teori tyder på at det er noe fundamentalt galt med teorien, så er det sannsynligvis også noe galt med noen av begrepene i teorien. Skal teorien derfor plasseres på et sunnere grunnlag, må det nødvendigvis komme noe nytt og fremmed inn i teorien. Det kan jo nettopp være de eksisterende begreper og den eksisterende tenkemåte som er skyld i problemene. Har man den holdning at man gjerne ser at problemet med paradoksene i mengdelæren blir løst, men samtidig insisterer på at dette må skje uten at noen av lærens trosartikler røres ved, ja, så er det trolig lite håp om at problemet med paradoksene noen gang vil bli løst.

Boken er stort sett en prosatekst, den inneholder lite formalisme og få tekniske utledninger. Det er i det hele tatt ingen vanskelig matematikk i boken og den forutsetter ingen spesiell forhåndskunnskap verken om klassisk mengdelære eller annen matematikk utenom gymnaspensumet. Boken kan man si er en populærfilosofisk tilnærming til grunnlagsproblemene i matematikken. Boken er noe polemisk. Grunnen til dette er at den gjeldende matematikk, som etter min mening nå er moden for en omfattende revisjon, fremdeles har mange sterke tilhengere, og at det derfor er nødvendig med noe argumentasjon mot det bestående for å vinne fram med de nye ideene.

Til slutt en advarsel til leseren. Boken tar en rekke matematiske "sannheter" opp til ny vurdering. Leseren må derfor være forberedt på å komme i opposisjon til enkelte påstander og utledninger som fremsettes i boken. Og leseren vil kanskje komme til å si til seg selv at "det er jo ikke slik matematikken er". Men leseren bør heller si: "det er jo ikke slik den matematikk jeg lærte på skolen er". For er egentlig skolematematikken så overbevisende når man går den etter i sømmene? Nei, dagens jordiske matematikk har en mengde defekter. At mange av disse er lite kjente selv blant matematikere, skyldes at de er så godt kamuflerte og at de i undervisningen gjennom forskjellige teknikker blir usynliggjort. De av leserne som ønsker et størst mulig utbytte av boken, bør derfor gå til lesningen med et mest mulig åpent sinn og uten altfor mange forhåndsoppgjorte meninger. Det er ikke dermed sagt at han/hun bør akseptere alt som sies i boken ukritisk, men at man bør vende kritikken like mye mot den etablerte matematikk som mot den matematikk som legges fram i boken.

Det har ikke vært lett å få etablerte matematikere til å lese igjennom og gi kommentarer til en bok som innvarsler et paradigmeskifte. Allikevel vil jeg nevne tre matematikere ved Universitetet i Oslo, som med sin uttalelser om forløperen til denne boken [Ein98] har gitt impulser til den herværende bok. Disse er Dag Normann, Simen Gaure og Olav Arnfinn Laudal. Ellers står jeg i stor takknemlighetsgjeld til den svenske matematikeren Erland Gadde, som over mange år har vært utrettelig i sine forsøk på å påvise feil i mine resonnementer. Gadde har blant annet lagt enkelte av mine ideer fram på diskusjonssider på internett. Jeg har også hatt stor nytte av en meningsutveksling med forsker Arve Meisingset i Telenor. Ellers vil jeg takke de mange, både matematikere og ikke-matematikere, som har gitt tilkjenne at de har lest min forrige bok, og gitt oppmuntrende tilbakemeldinger.

Bærum, juni 2002

John Einbu